Двойные ряды

Утв 1. (почти очевидно)

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{N} a_k = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k - \sum_{k=1}^{k_0} a_k \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k - \sum_{k=1}^{k_0} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{k_0} a_k$$

Утв 2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, то имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Док-во. Так как $-|a_k| \leqslant a_k \leqslant |a_k|$, то верны неравенства для конечных сумм

$$-\sum_{k=1}^{N} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{N} |a_k|$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим

$$-\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |a_k| \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |a_k|$$

или, что то же самое

$$-\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

откуда следует

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Теорема 1. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

абсолютно сходится. Расставим его слагаемые в виде двумерной бесконечной матрицы $(a_{s(i,j)})$ с помощью какой-нибудь биективной функции $(i, j) \mapsto s(i, j)$.

Тогда повторный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{s(i,j)}$$

сходится, причем к той же сумме.

Док-во. Обозначим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = A^*$$

Для начала заметим, что при любом фиксированном i абсолютно сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{s(i,j)}$$

Это следует из того, что частичные суммы ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{s(i,j)}|$ не убывают и ограничены сверху:

$$|a_{s(i,1)}| + |a_{s(i,2)}| + \dots + |a_{s(i,N)}| \leqslant |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{M_N}| \leqslant A^*,$$

где $M_N = \max\{s(i,1), s(i,2), \dots, s(i,N)\}$.

Далее. Так как $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = A^*$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется k_0 такое, что

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k| = A^* - \sum_{k=1}^{k_0} |a_k| < \varepsilon \tag{T1.1}$$

С учетом утв 2 получим, что

$$\left| A - \sum_{k=1}^{k_0} a_k \right| = \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k \right| \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \tag{T1.2}$$

Найдутся достаточно большие m_0, n_0 такие, что все слагаемые $a_1, a_2, \dots, a_{k_0}$ расположены среди первых m_0 строк и первых n_0 столбцов матрицы. Если говорить формально, при отображении s прообраз множества $\{1, \dots, k_0\}$ содержится в прямоугольнике $\{1, \dots, m_0\} \times \{1, \dots, n_0\}$.

Поэтому при $m \geqslant m_0$ и $n \geqslant n_0$ разность

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{s(i,j)} - \sum_{k=1}^{k_0} a_k \tag{T1.3}$$

не содержит ни одного слагаемого из набора $a_1, a_2, \dots, a_{k_0}$, т.е. может содержать только слагаемые из множества $a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \dots$. Из этого следует, что

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{s(i,j)} - \sum_{k=1}^{k_0} a_k \right| = \left| \sum_{k \in \mathcal{K}} a_k \right| \leqslant \sum_{k \in \mathcal{K}} |a_k| \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Здесь через $\mathcal{K}$ обозначено некоторое подмножество индексов из $\{k_0+1, k_0+2, \dots\}$, соответствующее слагаемым разности (T1.3).

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ получим

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} a_{s(i,j)} - \sum_{k=1}^{k_0} a_k \right| \leqslant \varepsilon$$

С учетом неравенства (T1.2) при $m > m_0$ будем иметь

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} a_{s(i,j)} - A \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} a_{s(i,j)} - \sum_{k=1}^{k_0} a_k \right| + \left| A - \sum_{k=1}^{k_0} a_k \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ было произвольным, из этого следует

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{s(i,j)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} a_{s(i,j)} = A$$

Теорема 2. Пусть повторный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \tag{T2.1}$$

таков, что сходится повторный ряд из модулей $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$. Расставим слагаемые этого двухиндексного ряда в одноиндексный ряд со слагаемыми $a_{i(k),j(k)}$ с помощью какой-нибудь биективной функции $k \mapsto (i(k), j(k))$.

Тогда полученный одноиндексный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i(k),j(k)} \tag{T2.2}$$

сходится, причем к той же сумме.

Док-во.

Для начала обозначим

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = A_i, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = A_i^*$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^* = A^*$$

Далее покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i(k),j(k)}|$ сходится. Для этого достаточно показать, что его частичные суммы не убывают и ограничены сверху.

В самом деле, имеем оценку

$$|a_{i(1),j(1)}| + |a_{i(2),j(2)}| + \dots + |a_{i(k),j(k)}| \leqslant \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=1}^{N_k} |a_{i,j}|,$$

где $M_k = \max\{i(1), i(2), \dots, i(k)\}$, $N_k = \max\{j(1), j(2), \dots, j(k)\}$.

По условию при любом i сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = A_i^*$, поэтому при любом i верно

$$\sum_{j=1}^{N_k} |a_{i,j}| \leqslant A_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$$

Следовательно, имеем

$$|a_{i(1),j(1)}| + |a_{i(2),j(2)}| + \dots + |a_{i(k),j(k)}| \leqslant \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=1}^{N_k} |a_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{M_k} A_i^* = \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$$

По условию сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^* = A^*,$$

поэтому для его частичных сумм верны оценки

$$\sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^{M_k} A_i^* \leqslant A^* = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^* = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$$

В итоге имеем

$$|a_{i(1),j(1)}| + |a_{i(2),j(2)}| + \dots + |a_{i(k),j(k)}| \leqslant A^* = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|.$$

Мы доказали, что одноиндексный ряд (T2.2) сходится абсолютно. Поэтому мы можем применить к нему теорему 1, переставив его элементы обратно в виде матрицы. По теореме 1 сумма повторного ряда (T2.1) будет равна сумме одноиндексного ряда (T2.2).

Как следствие теорем 1 и 2 получаем:

Теорема 3. Пусть повторный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$$

таков, что сходится повторный ряд из модулей $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{i,j}|$. Тогда сходится повторный ряд с другим порядком суммирования, причем к той же сумме

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$$